1. MECANICĂ CLASICĂ NEWTONIANĂ

1.1. Dinamica punctului material

1.1.2. Sistem de referință. Descrierea mișcării punctului material

Una din noțiunile fundamentale ale mecanicii clasice este noțiunea de punct material sau particulă (punct fizic). Această noțiune este o abstractizare geometrică asociată unui corp fizic. Punctul material este așadar un punct geometric căruia i se asociază anumite atribute fizice (de exemplu masa, sarcina, etc).

Este evident că un punct material nu are dimensiuni. Modelarea unui corp printr-un punct material se face după o analiză a mișcării corpului respectiv. Dacă dimensiunile unui corp sunt mult mai mici decât dimensiunile traiectoriei pe care se deplasează acesta el poate fi modelat printr-un punct material.

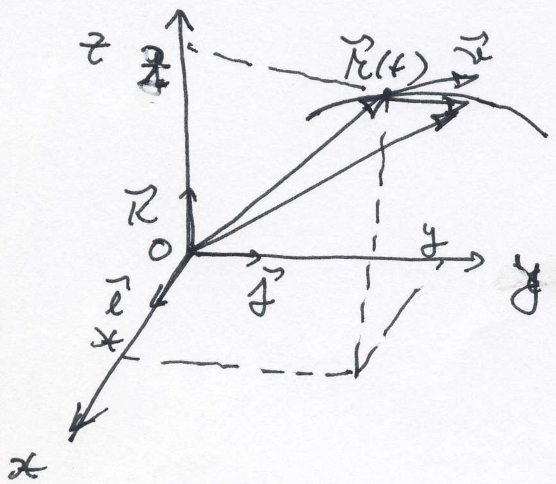
De exemplu mișcarea Pământului în jurul Soarelui poate utiliza noțiunea (modelul) de punct material asociat Pământului. Nu mai este posibil acest lucru dacă se analizează mișcarea Pământului în jurul propriei axe.

Toate fenomenele fizice implicit mișcarea mecanică se desfășoară în timp și spațiu. Poziția spațială a unui punct material poate fi precizată numai în raport cu un sistem de referință.

Prin sistem de referință se înțelege un sistem de corpuri perfect rigide și reciproc imobile plus un instrument perfect de măsurare a timpului.

Dacă poziția rămâne neschimbată în timp punctul material este în repaus în raport cu

cu sistemul de referință condiționat. În caz contrar punctul material se află în mișcare.
Mișcarea și repausul sunt noțiuni relative ele depinzând de sistemul de referință ales.
Sistemele de referință sunt idealizate prin alegerea unui sistem de trei axe perpendiculare față de care poziția unui punct material este unic precizată prin trei coordonate (este o constatare empirică faptul că spațiul fizic este tridimensional.
În fizică se aleg sistemele de referință în care spațiul este omogen (are aceleași proprietăți în orice punct) și izotrop (are aceleași proprietăți în orice direcție), iar timpul este uniform (curge la fel în orice moment). Astfel de sisteme se numesc sisteme de referință inerțiale.
Există o întreagă clasă de sisteme de referință inerțiale, adică toate sistemele care se mișcă rectiliniu și uniform unele față de altele.
Legile fizicii trebuie astfel formulate încât ele să fie invariante la trecerea de la un sistem de referință la altul. Acesta este principiul relativității.
Poziția unui punct poate fi precizată cu ajutorul unui vector de poziție, care este o funcție vectorială de timp. $\vec{r}(t)$.



Cunoașterea lui $\vec{r}(t)$ înseamnă a cunoaște mișcarea punctului material.
În coordonate carteziene
$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$
Numim lege de mișcare funcția $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

În coordonate carteziene legea de mișcare se exprimă prin trei funcții scalare

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1)$$

Definim viteza la un moment t (vectorul viteză)

$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \text{ notație } \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \quad (2)$$

Definim accelerația (vectorul accelerație)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \overset{not}{\equiv} \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (3)$$

În coordonate carteziene

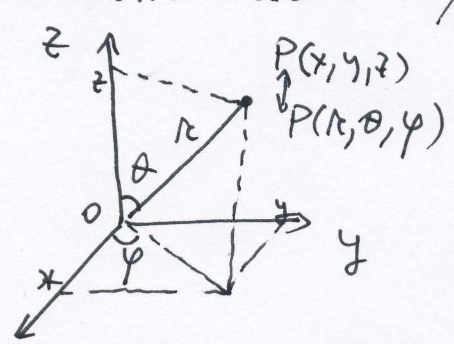
$$\vec{v} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z} \equiv \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \quad (4)$$

$$\vec{a} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} \equiv i a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z \quad (5)$$

Observație: vectorul viteză este tangent la traiectorie

Alte sisteme de coordonate:

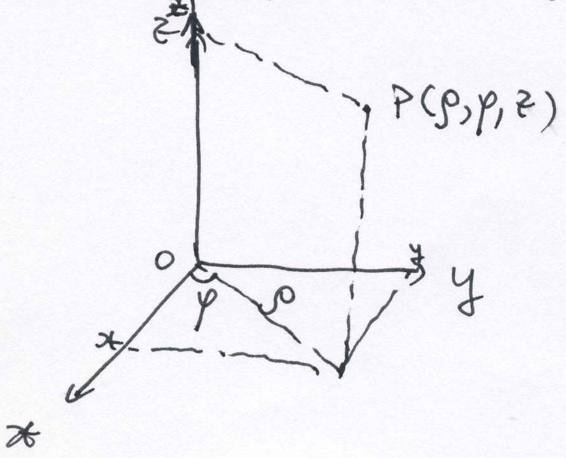
- coordonate sferice: (r, θ, φ)



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (6)$$

$r \in [0, \infty)$, $\theta = [0, \pi]$, $\varphi = [0, 2\pi)$

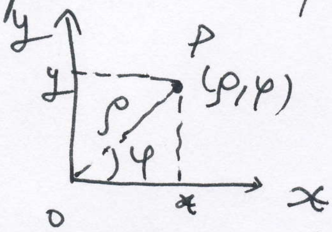
- coordonate cilindrice: (ρ, φ, z)



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad (7)$$

$\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$;
$z \in (-\infty, +\infty)$

Dacă mişcare este plană se pot utiliza coordonatele polare în plan: (ρ, φ)



$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} \qquad (8)$$

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Observaţie: în funcţie de simetria problemei analizate se alege un sistem de coordonate convenabile.

Legea de mişcare se exprimă acum în aceste coordonate. De exemplu în coordonate sferice:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \qquad (9)$$

În noile sisteme de coordonate se pot exprima şi vectorul viteză şi acceleraţie.

Să analizăm mişcarea în coordonate cilindrice de exemplu (coordonatele polare în plan se obţin de aici prin $z = 0$).

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi \\ v_y &= \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi \\ v_z &= \dot{z} = \dot{z} \end{aligned} \qquad (10)$$

Acestea sunt componentele carteziene ale vitezei în coordonate cilindrice.

Putem determina modulul vectorului viteză.

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ în coordonate cilindrice

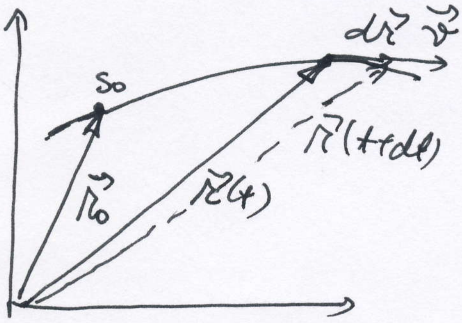
$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 &= \dot{\rho}^2\cos^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \\ &+ \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \\ &+ \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

sau în final

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \qquad (11)$$

- Coordonate naturale. Se utilizează pentru mișcările curbilinii în general.

Vom analiza mișcarea curbilinie plană. Considerăm o curbă dată pe care se mișcă un punct material. Poziția punctului material se determină unic pe curba dată prin spațiul parcurs s la momentul t



$$s = s(t)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$$

Determinăm viteza $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{ds}$ este un versor tangent la traiectorie

Într-adevăr: $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{|ds|}$ dar $|d\vec{r}| = ds$

$\Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ cu $d\vec{r}$ tangent la traiectorie, și

$\frac{d\vec{r}}{ds}$ este tangent la traiectorie

Notăm $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ - versorul tangent

$\vec{v}_{(t)} = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}$. Dar $\frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\vec{v}| \equiv v$

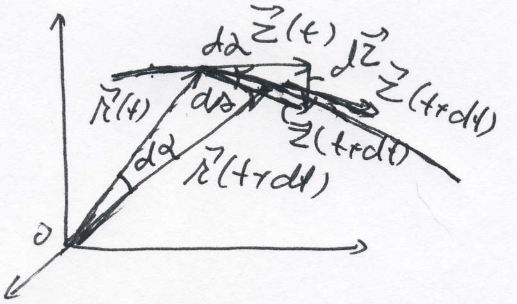
și obținem pentru viteză

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{\tau} \qquad (12)$$

Determinăm accelerația punctului material

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v\,\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (13)$$

Spre deosebire de versorii sistemului de coordonate cartezian $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ care sunt constanți versorul $\vec{\tau}$ este variabil fiind mereu tangent la traiectorie. Determinăm variația acestuia în timp.



$$|d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}|d\alpha = d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|d\vec{\tau}|}{d\alpha} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\right| = 1$$

deci $\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\right| = 1 \Rightarrow \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}$ - versor

$d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ în limita infinitezimală. Deci observăm că $\vec{n}$ este un versor perpendicular pe $\vec{\tau}$ îndreptat spre centrul curbei. Revenim la $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \vec{n}\omega \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega \text{ - viteză unghiulară}$$

Așadar accelerația (13) se scrie acum

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\omega\vec{n} \tag{14}$$

Dacă introducem raza de curbură din punctul considerat R constatăm că $ds = R\,d\alpha$

$$\text{și} \quad \frac{ds}{dt} = R\frac{d\alpha}{dt} \Leftrightarrow v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \tag{15}$$

Introducând (15) în (14) obținem

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \tag{16}$$

În sistemul de coordonate natural vectorul $\vec{a}$ se descompune astfel

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} \equiv \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{17}$$

unde $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ - este accelerația tangențială

și $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ - este accelerația normală (centripetă)

Modulul accelerației se determină astfel

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_\tau^2 + a_n^2$$

$$\text{adică} \quad a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \tag{18}$$

Am folosit faptul că $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$, $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$ $\vec{n}\cdot\vec{\tau} = 0$ $(\vec{n}\perp\vec{\tau})$.

Dacă curba este spațială se mai introduce un versor $\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{n}$ $(\vec{\beta}\perp\vec{\tau}, \vec{\beta}\perp\vec{n})$ obținându-se un sistem de trei versori care definesc așa numitul reper Frenet (reper mobil de-a lungul curbei).

1.2. Principiile mecanicii newtoniene (Legile dinamicii)

Mecanica newtoniană se bazează pe patru legi fundamentale (principii) dintre care primele trei au fost formulate de Newton.

Trebuie menționat că deși acestea sunt formulate cu termenul de „corp" vom subînțelege că acestea se aplică în limita corpurilor privite ca puncte materiale.

Principiul I (Principiul inerției): Orice corp liber își păstrează starea de ~~de~~ repaus sau mișcare rectilinie și uniformă.

Un corp este liber dacă asupra lui nu se manifestă nicio interacțiune (nu se exercită nicio forță).

Proprietatea corpurilor de a-și menține starea de mișcare sau repaus se numește inerție și proprietatea de inerție este măsurată (cuantitativ) cu ajutorul mărimii fizice numită masă (inerțială).

De asemenea trebuie precizat că atât principiul I cât și principiul II (fundamental) sunt valabile în sisteme de referință inerțiale (în acest cadru sunt formulate).

Principiul II (Principiul fundamental)

Pentru început vom introduce două noțiuni noi:
- forța care măsoară intensitatea unei interacțiuni (notată $\vec{F}$) ce se exercită asupra unui corp (punct material).
- impulsul care măsoară „cantitatea de mișcare" și este definit prin $\vec{p} = m\vec{v}$.

Principiul fundamental poate fi formulat în două moduri.

- Variația în timp a impulsului unui punct material (particule) este egală cu forța ce acționează asupra acestuia:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{19}$$

In mecanica clasică masă este proprietă constantă și în consecință $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$.

Obținem astfel o a doua formulare a principiului II

Dacă asupra unui corp (punct material) acționează o forță $\vec{F}$ aceasta imprimă corpului o accelerație direct proporțională cu intensitatea forței și invers proporțională cu masa corpului.

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{20}$$

- Principiul III (principiul acțiunii și reacțiunii)

Dacă asupra unui corp (1) acționează un alt corp (2) cu o forță $\vec{F}_{21}$ atunci corpul (1) acționează asupra corpului (2) cu forță $\vec{F}_{12}$ egală în modul dar de sens opus.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \iff \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \tag{21}$$

Perechea de forțe $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ poartă numele de acțiune - reacțiune (depinde din ce punct de vedere este privită); niciuna dintre acestea nu este primordială).

Observație: spre deosebire de primele două principii care sunt universale, principiul III nu este universal valabil (este contrazis de exemplu în cazul forțelor electromagnetice).

- Principiul IV (principiul independenței acțiunii forțelor). Acest principiu afirmă că:

Dacă asupra unui punct material acționează forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n$ atunci se produce același efect ca și cum ar acționa o forță determinată prin suprapunere (ca rezultantă de sumă vectorială)

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{22}$$

Combinând aceste principii se obține ecuația lui Newton

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \iff m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{23}$$

In general forța $\vec{F}$ poate depinde de $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ și t.
Astfel obținem ecuațiile lui Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{24}$$

sau echivalent (prin proiecții carteziene)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \tag{25}$$

Ecuațiile lui Newton sunt ecuații de mișcare, deoarece rezolvarea acestora ne permite determinarea funcțiilor $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ sau echivalent $\vec{r} = \vec{r}(t)$ care reprezintă legile de mișcare ale punctului material.

Ecuațiile newtoniene de mișcare (25) reprezintă un sistem de 3 ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi. (cu trei funcții necunoscute $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$).

Știm că soluția generală a acestor ecuații este determinată până la $2 \cdot 3 = 6$ constante arbitrare. Pentru a determina complet soluțiile ecuațiilor de mișcare trebuie determinate aceste constante. Ele se determină prin impunerea unor condiții inițiale pentru $\vec{r}$ și $\dot{\vec{r}}$ adică:

$$\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0 \quad \text{și} \quad \vec{v}(t=t_0) = \vec{v}_0 \tag{26}$$

Așadar cunoașterea poziției inițiale $\vec{r}_0$ și a vitezei inițiale $\vec{v}_0$ putem determina complet legea de mișcare $\vec{r}(t)$, adică $\vec{r}$ și $\vec{v}$ la orice moment. Prin $(\vec{r}, \vec{v})$ înțelegem starea mecanică a punctului material la un moment dat.
Trebuie precizat că trebuie cunoscută forma concretă a interacțiunii adică forța $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

<u>Exemplu simplu:</u>

Considerăm $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) =$ constantă adică nu depinde de $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ și t (în general $\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$)
Ecuațiile de mișcare newtoniene sunt

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{27}$$

sau
$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \qquad (28)$$
Ecuațiile diferențiale sunt separate și pot fi rezolvate prin integrare directă.
$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{F_x}{m}t + C_{1x} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t^2 + C_{1x}t + C_{2x}$$
notăm $\frac{F_x}{m} = a_x$ – componenta după Ox a lui $\vec{a}$.
$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + C_{1x}t + C_{2x}$$
și similar
$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + C_{1y}t + C_{2y}$$
$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + C_{1z}t + C_{2z}$$
Condițiile inițiale sunt $\vec{v}(t=t_0=0) = \vec{v}_0$ și $\vec{r}(t=t_0=0) = \vec{r}_0$
sau
$$\begin{cases} v_x = \dot{x}(t=0) = v_{0x} \\ v_y = \dot{y}(t=0) = v_{0y} \\ v_z = \dot{z}(t=0) = v_{0z} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$
obținem un sistem algebric de 6 ecuații cu 6 necunoscute (cele 6 constante de integrare). Aceste ecuații sunt extrem de simple și se rezolvă independent (în acest caz) și direct.
$$\begin{cases} C_{1x} = v_{0x} \\ C_{1y} = v_{0y} \\ C_{1y} = v_{0y} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{2x} = x_0 \\ C_{2y} = y_0 \\ C_{3y} = z_0 \end{cases}$$
Așadar soluția ecuațiilor de mișcare este
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 \\ z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0 \end{cases} \qquad (29)$$
care reprezintă legea de mișcare.
În formă vectorială aceasta se scrie
$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \qquad (30)$$
Cum $\vec{F}$ e constant și $\vec{a}$ este constant și avem o mișcare uniform accelerată (în spațiu).
$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 \equiv \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\cdot\vec{v}_0 \qquad (31)$$
$\Delta\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{v}_0$, cu $\alpha = \frac{1}{2}t^2$ și $\beta = t$

$\Delta \vec{r}$ – deplasarea se află în planul determinat de $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ și $\vec{v}_0$. În consecință mișcarea este plană (în planul determinat de vectorii $\vec{F}$ și $\vec{v}_0$)

1.3. Teoreme și legi de conservare în dinamica punctului material

1.3.1. Teorema impulsului. Legea conservării impulsului

Teorema impulsului punctului material este o rescriere (reformulare) a principiului II, adică:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

$$\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \qquad (32)$$

Legea conservării impulsului: dacă $\vec{F} = 0$ atunci impulsul punctului material se conservă (rămâne constant).

$$\vec{F} \Rightarrow d\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{\text{const}} \Rightarrow \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \qquad (33)$$

1.3.2. Teorema momentului cinetic. Legea conservării momentului cinetic

Definim momentul cinetic prin

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \equiv m\vec{r} \times \vec{v} \qquad (34)$$

- Teorema variației momentului cinetic

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (35)$$

unde $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ este momentul forței în raport cu originea sistemului de coordonate.

Demonstrație

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}(m(\vec{r} \times \vec{v})) =$$

$$= m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \vec{a}$$

$$|\vec{v} \times \vec{v}| = v \cdot v \sin 0 = 0 \Rightarrow \vec{v} \times \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}.$$

- Legea conservării momentului cinetic:

Dacă momentul forței este nul $\vec{M}=0$ atunci momentul cinetic se conservă ($\vec{L}=\overrightarrow{const}$)

Demonstrație:

$$\vec{M}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0 \Rightarrow \vec{L}=const$$

Situații în care se conservă momentul cinetic

$$\vec{r}\times\vec{F}\equiv\vec{M}=0$$

1) $\vec{F}=0$ - punct material izolat.
2) $\vec{r}=0$ - punct material în repaus.
3) $|\vec{r}\times\vec{F}|=r\cdot F\sin\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0,\ \alpha=\pi$

adică dacă $\vec{F}\parallel\vec{r}$. (câmp de forțe central) $\Leftrightarrow \vec{F}=f(|\vec{r}|)\cdot\vec{r}\equiv F(|\vec{r}|)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Consecințe ale conservării momentului cinetic

1) $\vec{L}=\vec{L}_0=const \Rightarrow \vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}_0\times\vec{p}_0$

$$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}_0\times\vec{v}_0 \Rightarrow \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}_0\times\vec{v}_0=\frac{\vec{L}_0}{m}$$

$\vec{r}\times d\vec{r}\perp$ pe planul Π determinat de $\vec{r}$ și $d\vec{r}$

dar $\vec{r}\times d\vec{r}=\frac{\vec{L}_0}{m}dt \Rightarrow \vec{L}_0\perp\Pi$, $\vec{L}_0$ constant

$\Rightarrow \Pi$ plan constant, bine determinat

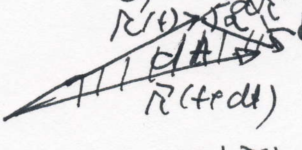
Dar $\vec{r}(t+dt)=\vec{r}(t)+d\vec{r}$ $\vec{r}(t+dt)\in$ planului Π.

Din aproape în aproape $\vec{r}$ la orice moment de timp rămâne în același plan. Deci mișcarea este plană într-un plan perpendicular pe $\vec{L}=\vec{L}_0=\overrightarrow{const}$.

2) $|\vec{L}|=const \Leftrightarrow |\vec{r}\times\vec{p}|=const$

dar $|\vec{L}|=|\vec{r}\times m\vec{v}|=m|\vec{r}\times\vec{v}|=m\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=$

$$=m\,r\cdot\frac{dr}{dt}\sin\alpha=m\frac{r\cdot dr\cdot\sin\alpha}{dt}$$



dar aria $dA=\frac{r\,dh}{2}=\frac{r\,dr\sin\alpha}{2}$

$$\Rightarrow |\vec{L}|=\frac{r\,dr\sin\alpha}{2\,dt}\cdot 2m=2m\frac{dA}{dt}$$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{|\vec{L}|}{2m}=const$ $\quad\frac{dA}{dt}$ - viteză areolară

1.3.3. Teorema variației energiei cinetice.

Definim lucrul mecanic al unei forțe constante pe o deplasare $\Delta\vec{r}$ prin

$$L = \vec{F}\Delta\vec{r}$$

Dacă forța nu este constantă putem alege o deplasare infinitezimală $d\vec{r}$ pe care forța poate fi considerată constantă. Avem acum lucrul mecanic elementar.

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (36)$$

Observație: notația dL arată că dL nu este o diferențială (exactă) în general. Adică nu există o funcție $f(x,y,z)$ (în general) astfel încât $F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

Lucrul mecanic pentru o deplasare a unui punct material între două puncte pe o curbă oarecare este

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} \qquad (37)$$

În cazul în care punctul material se deplasează între punctele 1 și 2 pe o anumită traiectorie atunci integrala de mai sus se face în lungul acelei traiectorii.

Pentru a deduce teorema variației energiei cinetice pornim de la principiul fundamental (ecuațiile de mișcare newtoniene).

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Înmulțim ultima relație scalar cu $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

de unde $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}$

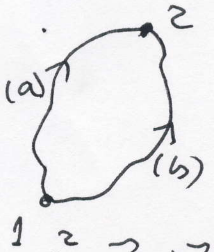
sau $m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}d\vec{r} \qquad (38)$

Ultima relatie se scrie
$$d\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = dL \qquad (39)$$
Definim energia cinetică a punctului material prin
$$E_c \equiv T = \frac{m\vec{v}^2}{2} \qquad (40)$$
In acest caz obtinem din (39) teorema variatiei energiei cinetice sub formă infinitezimală
$$dE_c = dL \qquad (41)$$
Pentru a obtine variatia finită a energiei cinetice integrăm intre punctul inital (1) si final (2) al unei traiectorii
$$\int_1^2 dE_c = \int_1^2 dL \equiv \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}$$
si obtinem
$$E_{c(2)} - E_{c(1)} = L_{12}$$
$$\Delta E_c = L_{12} \qquad (40)$$
Ultima relatie exprimă teorema variatiei energiei cinetice care spune că variatia energiei cinetice intre două puncte ale unei traiectorii este egală cu lucrul mecanic efectuat de forta ce actionează asupra punctului material intre cele două puncte ale traiectoriei.

1.3.4. Câmp de forte conservativ. Legea conservării energiei totale

Presupunem că forta $\vec{F}$ este o functie de pozitie $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, adică reprezintă un câmp vectorial.

Un câmp de forte se numeste conservativ sau potential dacă lucrul mecanic efectuat de acesta intre două puncte nu depinde de "drum", adică de curba intre cele "două puncte.



$$L_{12}^{(a)} = \int_{1(a)}^{2} \vec F d\vec r$$

$$L_{12}^{(b)} = \int_{1(b)}^{2} \vec F d\vec r$$

$$\Rightarrow \int_{1(a)}^{2} \vec F d\vec r = \int_{1(b)}^{2} \vec F d\vec r \Rightarrow \int_{1(a)}^{2} \vec F d\vec r - \int_{1(b)}^{2} \vec F d\vec r = 0$$

$$\Rightarrow \int_{1(a)}^{2} \vec F d\vec r + \int_{2(b)}^{1} \vec F d\vec r = 0 \Leftrightarrow \oint \vec F d\vec r = 0$$

Aplicăm teorema lui Stokes $\oint_{\Gamma} \vec F d\vec r = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \nabla \times \vec F \cdot d\vec S$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma(\Gamma)} (\nabla \times \vec F) \cdot d\vec S = 0$$

Așadar dacă pentru o forță lucrul mecanic efectuat de aceasta nu depinde de drum atunci

$$\nabla \times \vec F \equiv rot\, \vec F = 0 \qquad (41)$$

Condiția (41) este îndeplinită dacă

$$\vec F = -\nabla E_p \equiv -grad\, E_p \qquad (42)$$

unde $E_p(\vec r)$ este un câmp scalar numit energie potențială notată și $V(\vec r)$.

Problema poate fi privită și astfel:

am văzut că în general

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (43)$$

adică este o formă diferențială.

Dacă acum există o funcție $E_p(x,y,z) \equiv V(\vec r)$ astfel încât

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (44)$$

(semnul minus este ales prin convenție).

atunci $dL = -\frac{\partial V}{dx} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz = -dV$ (45)

Adică dL devine o diferențială (totală exactă)

În acest caz $L_{12} = \int_1^2 dL = -\int_1^2 dV = -(V(\vec r_2) - V(\vec r_1))$ (46)

adică L_{12} nu depinde de drum ci doar de pozițiile inițială 1 ($\vec r_1$) și finală 2 ($\vec r_2$).

Pe de altă parte (43) se scrie $dL = \vec{F} d\vec{r}$ iar

(45) $dL = -\nabla V \cdot d\vec{r}$, unde $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$.

Presupunând că avem un câmp de forțe conservativ, aplicăm teorema variației energiei cinetice

$$dE_c = dL \Rightarrow dE_c = -dE_p \qquad (47)$$

$$\Rightarrow d(E_c + E_p) = 0 \qquad (48)$$

Notăm $E = E_c + E_p \equiv T + V$. E reprezintă energia totală pentru punctul material.

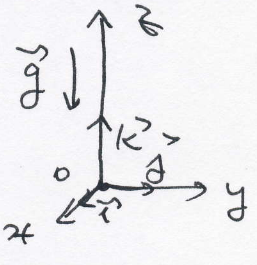
Am obținut că $dE = 0$ adică

$$E = \text{constant}. \qquad (49)$$

Așadar într-un câmp de forțe conservative energia totală se conservă. ($E = T + V = \text{const.}$)

Exemple:

- câmpul gravitațional uniform și omogen de la suprafața pământului.



$$\vec{F} \equiv \vec{G} = m\vec{g}$$

$$dL = m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= m(-g\vec{k})(\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz)$$

$$\Rightarrow dL = -mg\,dz$$

$$L_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dL = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mg\,dz = -\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} mg\,dz =$$

$$= -(mgz_2 - mgz_1) \overset{(46)}{=} -(V_2 - V_1)$$

$\Rightarrow V(\vec{r}) = V(x,y,z) \equiv mgz + C$ — energia potențială gravitațională. Dacă luăm $V(z=0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow V = mgz$

- câmpul forțelor elastice.

dacă $F = -kx$ — forță de tip elastic

$$dL = F\,dx = -kx\,dx = -d\left(\frac{kx^2}{2}\right)$$

dar $dL = -dV \Rightarrow V(x) = \frac{kx^2}{2}$ - energia potențială în câmpul forțelor elastice (am ales $V(0)=0$)

- Câmpul gravitațional - legea atracției universale

$$\vec{F} = -K\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{KmM}{r^2}\,\frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}}{r}$$

dar $\vec{r}^{\,2} = r^2 \Rightarrow 2\vec{r}\cdot d\vec{r} = 2r\cdot dr \Rightarrow r\,dr = \vec{r}\,d\vec{r}$

$$dL = -\frac{KmM}{r^2}\,\frac{r\,dr}{r} = -\frac{KmM}{r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{d}{dr}\left(-\frac{KmM}{r}\right)dr = -d\left(-\frac{KmM}{r}\right)$$

dar $dL = -dV \Rightarrow V_{(r)} = -\frac{KmM}{r} + C$

Alegem $V(r)\big|_{r\to\infty} = 0 \Rightarrow C = 0$ și obținem $V(r) = -\frac{KmM}{r}$

1.2. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Considerăm acum n puncte materiale care pot interacționa atât între ele cât și cu mediul exterior.

Fie i un punct material din sistem de masă m_i. Asupra sa acționează:

- $\vec{F}_i^{(e)}$ - forțele externe (rezultanta acestora)
- $\vec{F}_i^{(i)}$ - rezultanta forțelor interne

$$\vec{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ji}$$

Asupra lui i acționează forța rezultantă

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} \qquad (50)$$

$\boxed{1.2.1}$ Teorema variației impulsului și legea conservării impulsului pentru un sistem de puncte materiale.

Aplicăm principiul fundamental pentru fiecare punct material

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} \qquad i=\overline{1,n} \qquad (51)$$

Adunăm cele n ecuații vectoriale de mișcare

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} \qquad (52)$$

Definim impulsul total al sistemului

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \qquad (53)$$

și avem $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \vec{P}$ (54)

Notăm $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)}$ – rezultanta forțelor exterioare ce acționează pe întreg sistemul de puncte materiale

De asemenea putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ij} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} \right) = 0 \,, \qquad (55)$$

deoarece $\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = 0$ $\left(\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \right)$ pe baza principiului III.

Cu aceste prelucrări (52) se scrie

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} \qquad (56)$$

și reprezintă teorema variației impulsului pentru un sistem de puncte material.

Aceasta se poate enunța astfel: Variația în timp a impulsului total al unui sistem de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului de puncte materiale.

Dacă sistemul este izolat $\vec{F}^{(e)}=0$ atunci

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0 \text{ și avem } \vec{p}=\text{constant}. \tag{57}$$

Ultima relație exprimă legea conservării impulsului unui sistem de puncte materiale:

- Dacă un sistem de p.m. este izolat atunci impulsul total al acestuia se conservă

$$\vec{p}_0=\vec{p}_f$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i^{(f)} \tag{58}$$

$\boxed{1.2.2.}$ Teorema variației momentului cinetic total și legea conservării momentului cinetic total pentru un sistem de p.m.

Definim momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{p}_i \tag{59}$$

și momentul îl derivăm în raport cu timpul

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i=$$

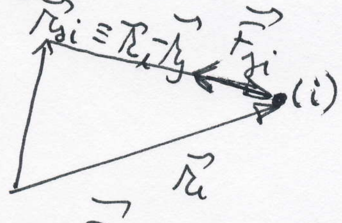
$$=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\left(\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ji}+\vec{F}_i^{(e)}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}$$

Notăm $\vec{M}^{(e)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}$, care reprezintă momentul rezultant al tuturor forțelor externe (60)

Prelucrăm suma dublă

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_j\times\vec{F}_{ij}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji}+\vec{r}_j\times(-\vec{F}_{ji})\right)=\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j=1}^{n}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ji}$$



$\vec{r}_i-\vec{r}_j \stackrel{not}{=} \vec{r}_{ji}$

$\vec{r}_{ji}\uparrow\downarrow\vec{F}_{ji}$

$\Rightarrow \vec{r}_{ij}\times\vec{F}_{ji}=0$ sau $(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ji}=0$

adică obținem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji})=0 \qquad (61)$$

Obținem pentru variația momentul cinetic total (60), forma finală

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}^{(e)} \qquad (62)$$

Adică variația în timp a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale este egal cu momentul forțelor externe rezultant.

Dacă $\vec{M}^{(e)}=0$ (momentul forțelor externe este nul) atunci

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}=\text{const} \qquad (63)$$

Momentul cinetic se conservă dacă rezultanta momentelor tuturor forțelor externe ce acționează asupra unui sistem de puncte materiale se anulează.

1.2.3. Teorema variației energiei cinetice totale și legea conservării energiei mecanice totale pentru un sistem de puncte materiale

Scriem principiul II al dinamicii pentru fiecare punct (i) din sistemul de puncte materiale

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} \qquad i=\overline{1,n} \qquad (69)$$

Inmulțim fiecare relație cu $d\vec{r}_i$ și însumăm după i de la 1 până la n:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i \qquad (70)$$

In primul membru avem

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i\, d\vec{r}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i\, \vec{v}_i dt = m_i \dot{\vec{v}}_i\, \vec{v}_i dt = m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = d\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) \qquad (71)$$

In al doilea membru am obținut

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(i)} \equiv dL^{(i)}$$ – lucrul mecanic al tuturor forțelor interne

și

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(e)} \equiv dL^{(e)}$$ – lucrul mecanic al tuturor forțelor externe

Cu aceste relații (70) se scrie

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) = \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(e)}$$

sau

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) = \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(e)} \qquad (72)$$

Introducem energia cinetică totală a sistemului

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} \equiv \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} \qquad (73)$$

Obținem astfel expresia matematică a teoremei variației energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale, sub formă diferențială

$$dT = \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(e)} \equiv dL^{(i)} + dL^{(e)} \qquad (74)$$

Integrând ultima ecuație între o stare inițială (1) caracterizată de pozițiile $\vec{r}_i^{(1)}, i=\overline{1,n}$ și o stare finală (2) caracterizată de pozițiile $\vec{r}_i^{(2)}, i=\overline{1,n}$ obținem ținând cont că în (1) vitezele particulelor din sistem sunt $\vec{v}_i^{(1)}$ iar în (2) $\vec{v}_i^{(2)}$.

$$\int_{(1)}^{(2)} dT = \int_{(1)}^{(2)} dL^{(i)} + \int_{(1)}^{(2)} dL^{(e)}$$

sau

$$\Delta T \equiv T^{(2)} - T^{(1)} = L_{12}^{(i)} + L_{12}^{(e)} \qquad (75)$$

Această relație exprimă teorema variației energiei cinetice pentru un sistem în formă finită.

- Variația energiei cinetice totale este egală cu suma tuturor lucrurilor mecanice efectuate atât de forțele interne cât și de cele externe

Dacă toate forțele $\vec{F}_{ij}$ și $\vec{F}_i^{(e)}$ (interne și externe) sunt conservative atunci:

$$dL_i^{(e)} = \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r}_i = -dV_i^{(e)}$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} dL_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} -dV_i^{(e)} = d\left(-\sum_{i=1}^{n} V_i^{(e)}(\vec{r}_i)\right) \qquad (76)$$

De asemenea pentru forțele interne avem

$$\sum_{i=1}^{n} dL_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ij}\, d\vec{r}_j\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji}(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}\sum \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_{ji}$$

și dacă acestea sunt conservative

$$dL^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} dL_i^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n} dV_{ji}^{(i)} = d\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n} V_{ji}^{(i)}\right) \qquad (77)$$

Introducând (76) și (77) în (74) obținem

$$d(T) \equiv d\left(\sum_i T_i\right) = d\left(-\sum_i V_i^{(e)}\right) + d\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum V_{ij}^{(i)}\right)$$

de unde

$$d\left(\sum_i T_i + \sum_i V_i^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum V_{ij}^{(e)}\right) = 0 \qquad (78)$$

Energia mecanică totală a sistemului este

$$E = \sum_i T_i + \sum_i V_i^{(e)} + \frac{1}{2} \sum\sum_{i \neq j} V_{ij}^{(i)} \qquad (79)$$

$$\equiv T + V$$

adică este suma dintre energia cinetică totală T și energia potențială totală V (V reprezintă suma tuturor energiilor potențiale de interacție atât externă cât și internă) In acest caz din (78) obținem

$$dE = 0 \iff E = \text{cst} \qquad (80)$$

adică energia mecanică totală se conservă dacă toate interacțiunile sunt potențiale (conservative). Adică:

$$E = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\vec{v}_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{n} V_i^{(i)}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{n}\sum^{n} V_{ij}^{(e)}(\vec{r}_{ij}) \qquad (81)$$

are aceași valoare pentru toate stările prin care evoluează sistemul

1.2.4. Sistemul centrului de masă. Teoreme de tip König

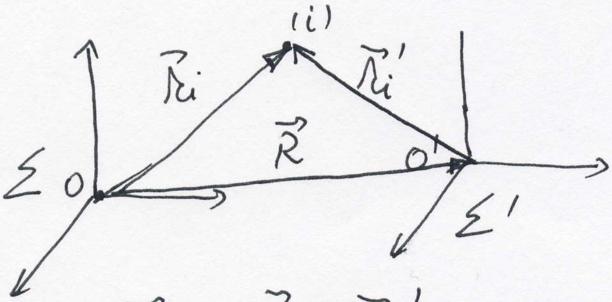
După cum am văzut mișcarea este descrisă într-un sistem de referință inerțial în care la orice moment de timp avem vectorii de poziție ai particulelor sistemului $\vec{r}_i(t)$ și vitezele acestora $\vec{v}_i(t)$.

Introducem un nou sistem de referință a cărei origine este precizată în sistemul de referință inițial prin $\vec{R}$

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad (81)$$

unde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ este masa totală a sistemului de puncte materiale.

In noul sistem de referință (Σ') pozițiile sunt determinate de $\vec{r}_i'$



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \qquad (82)$$

Determinăm impulsul total $\vec{P}'$ în sistemul centrului de masă (SCM).

$$\vec{P}' = \sum_i m_i \vec{v}_i' = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' \qquad (83)$$

Din (81) avem: $M\dot{\vec{R}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$

și $\sum(m_i \vec{r}_i) = \sum_i (m \vec{R}) + \sum_i (m_i \vec{r}_i')$,

ținând cont de (81) ultima egalitate se scrie

$$\vec{R} \sum_i m_i = \vec{R} \sum_i m_i + \sum m_i \vec{r}_i'$$

adică în $\Sigma' \equiv \Sigma_{CM}$ (sistemul centrului de masă) avem

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \qquad (84)$$

Derivând în raport cu timpul ultima relație avem

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' \equiv \sum_i m_i \vec{v}_i' = \sum_i \vec{p}_i' = \vec{P}' = 0, \qquad (85)$$

adică în SCM impulsul total al sistemului este zero (nul).

Să analizăm în general trecerea de la un sistem de referință la altul (Teoremele lui König) Vom folosi relația (82) dar pentru care în general nu este valabilă și (84) (da este adevărată dacă noul sistem Σ' este SCM)

Pentru impuls avem

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i') = \left(\sum m_i\right)\dot{\vec{R}} + \sum m_i \dot{\vec{r}}_i'$$

$$\vec{P} = M\vec{V} + \vec{P}' \qquad (86)$$

Dacă Σ' este SCM $P' = 0$ și $\vec{P} = M\vec{V}$ (87)

$\vec{V}$ - viteza centrului de masă. Din teorema variației impulsului total al sistemului de p.m.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}, \text{ și } \frac{dP}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} = M \cdot \vec{A} \qquad (88)$$

Adică $M\vec{A} = \vec{F}^{(e)}$ (89)
unde $\vec{A}$ este accelerația centrului de masă.
Așadar mișcarea centrului de masă se comportă ca mișcarea unui punct material în care a fost concentrată masa întregului sistem de p. m și asupra căruia acționează o forță egală cu rezultanta forțelor exterioare.
Acest rezultat justifică de ce mișcarea de ansamblu a unui corp poate fi privită ca și mișcarea unui punct material. Evident mai rămâne de analizat mișcarea sistemului față de sistemul centrului de masă pentru a da o descriere completă a mișcării.

Să analizăm acum comportarea momentului cinetic la schimbarea $\Sigma \to \Sigma'$.

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) =$$

$$= \sum_i m_i \left((\vec{R} + \vec{r}_i\,') \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i\,') \right) = \sum_i m_i (\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) +$$

$$+ \sum_i m_i (\vec{r}_i\,' \times \dot{\vec{r}}_i\,') + \sum_i m_i (\vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i\,') + \sum_i m_i (\vec{r}_i\,' \times \dot{\vec{R}}) =$$

$$= M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \sum_i m_i (\vec{r}_i\,' \times \dot{\vec{r}}_i\,') + \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i\,'\right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\,'\right) \times \dot{\vec{R}}$$

$$= M(\vec{R} \times \vec{V}) + \sum_i m_i (\vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i\,') + \vec{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i\,'}_{\vec{P}\,'} + \sum_i m_i \vec{r}_i\,' \times \dot{\vec{R}}$$

Adică

$$\vec{L} = M(\vec{R} \times \vec{V}) + \vec{L}\,' + R \times \vec{P}\,' + \sum m_i \vec{r}_i\,' \times \dot{\vec{R}} \qquad (89)$$

Dacă Σ' este Σ_{CM} $\sum_i m_i \vec{r}_i\,' \overset{(84)}{=} 0$ și $\vec{P}\,' = 0$
obținem (90)

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}\,'$$

Să analizăm și comportarea energiei cinetice

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i\,' + \dot{\vec{R}})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i\,'^{2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{R}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i\,' \cdot \dot{\vec{R}}$$

sau în final

$$T = T' + \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \vec{P}' \cdot V \qquad (91)$$

În sistemul centrului de masă $\vec{P}' = 0$

și

$$T = T' + \frac{1}{2} M \vec{V}^2 \qquad (92)$$

Concluzie: Alegerea sistemului centrului de masă permite descompunerea mișcării unui sistem de puncte materiale în mișcarea sistemului (globală), în care centrul de masă se comportă ca un punct material în care a fost concentrată întreaga masă a sistemul (mișcare acestuia fiind analizată sub acțiunea rezultantei forțelor externe) și o mișcare internă față de centrul de masă.

1.2.5. Dinamica sistemelor cu masă variabilă

Considerăm un sistem de puncte materiale în care analizăm comportarea mișcării globale (de ansamblu) a acestuia atunci când masa totală a sistemului este variabilă. Vom presupune că avem o distribuție continuă de masă astfel încât să putem introduce schimbul de masă al sistemului sub formă infinitezimal.

Presupunem că la un moment dat sistemul are masa $m = m(t)$ și viteza $\vec{v} = \vec{v}(t)$. (Descrierea globală va fi de fapt a centrului de masă).

Să presupunem că la un moment dat t sistemul cedează masa dm ($dm < 0$) cu viteza relativă a lui dm față de sistem $\vec{u}$. Dacă sistemul primește masă infitezimal dm în intervalul de timp dt atunci $dm > 0$.

Vom aplica teorema variației impulsului pentru sistemul considerat.

$$d\vec{P} = \vec{F}^{(e)}dt \equiv \vec{F}dt \qquad (92)$$

$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) \qquad (93)$$

Dar $\vec{p}(t) = m_{(t)}\vec{v}_{(t)}$ (94)

și $\vec{p}(t+dt) = (m_{(t)} - |dm|)\,\vec{v}(t+dt) + |dm|\vec{v}'_{(t)}$ (95)

Cunoaștem viteza relativă $\vec{u} = \vec{v}' - \vec{v} \Rightarrow \vec{v}' = \vec{u} + \vec{v}$ și $\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v}$. Introducem ultimele relații în (95)

$$\vec{p}(t+dt) = (m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|(\vec{u} + \vec{v}) \qquad (96)$$

Acum (93) devine

$$d\vec{P} = (m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|(\vec{u} + \vec{v}) - m\vec{v}$$

$$= m\vec{v} - \vec{v}|dm| + m\,d\vec{v} - |dm|\,d\vec{v} - m\vec{v} + |dm|\vec{u} + |dm|\vec{v}$$

$$d\vec{p} = m\,d\vec{v} + |dm|\vec{u} - |dm|\,d\vec{v} \qquad (97)$$

Introducând (97) în (92) obținem

$$m\,d\vec{v} + |dm|\vec{u} - |dm|\,d\vec{v} = \vec{F}dt \qquad (98)$$

Deoarece am analizat cazul $dm < 0 \Rightarrow |dm| = -dm$ și (98) se rescrie

$$m\,d\vec{v} - dm\,\vec{u} + dm\,d\vec{v} = \vec{F}dt$$

de unde

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\cdot\frac{dm}{dt} + \vec{F} + \frac{d\vec{v}}{dt}dm$$

În limita $dt \to 0$ (subînțeleasă) $dm \to 0$ $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0\right)$ și obținem

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad (99)$$

Observație: în analiza sistemului am neglijat forța externă ce se exercită asupra masei dm deoarece aceste în general depind de dm (este proporțională cu dm) și în limită dm ea se anulează.

Ecuația (99) ne arată că datorită variației masei sistemului apare un nou termen $\vec{u}\frac{dm}{dt}$ care poate fi interpretat ca o forță

$$\vec{F}_R = \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad (100)$$

In funcție de semnul lui $\frac{dm}{dt}$ ($dm>0$ sau $dm<0$) și de sensul lui $\vec{u}$ față de $\vec{v}$ la momentul t $\vec{F}_r$ poate fi o forță de accelerare sau de frânare. Ea este în general o forță de reacție.

În funcție de cazurile particulare în care este aplicată ecuația (99) mai poartă numele de ecuația Mescerski sau Tiolkowsici.

<u>Aplicație</u>: Considerăm o rachetă care este propulsată prin arderea unui combustibil și evacuat cu viteza $\vec{u}$ în sens opus vitezei $\vec{v}$ la un moment t. Neglijăm inițial forța externă $\vec{F}$, care în acest caz reprezintă forța de atracție gravitațională.

Atunci (99) se scrie în proiecție pe direcția lui $\vec{v}$

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}\quad,\quad \frac{dm}{dt}<0 \qquad (101)$$

sau $$m\,dv = -u\,dm \qquad (102)$$

și $$dv = -u\frac{dm}{m}$$

Prin integrarea ultimei ecuații obținem

$$v = -u\ln m + C \qquad (103)$$

la $t=0$ $m(t=0)=m_0$ și $v(t=0)=v_0$

adică pentru $m=m_0$ $v=v_0$

$$v_0 = -u\ln m_0 + C \Rightarrow C = v_0 + u\ln m_0$$

Introducând C în (103)

$$v - v_0 = u(\ln m_0 - \ln m) \qquad (104)$$

De unde $$v = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m} \qquad (105)$$

Evident viteza crește dacă m scade ($dm<0$) și deci $m<m_0$ $\frac{m_0}{m}>1$ și $\ln\frac{m_0}{m}>0 \Rightarrow v>v_0$.

Să presupunem că știm debitul masic Q_m cu care este evacuat combustibilul de ardere. Atunci presupunând că acesta este constant

$$\frac{dm}{dt} = -Q_m \quad , \quad Q_m > 0$$

și prin integrare obținem $m_{(t)} = -Q_m t + C$

la $t=0$ $m(t=0) = m_0 \Rightarrow C = m_0$ și deci

$$m(t) = m_0 - Q_m t \tag{106}$$

Introducem (106) în (105) și obținem viteza rachetei ca funcție de timp

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - Q_m t} \tag{107}$$

În plus dacă presupunem că gazul de ardere are densitatea ρ constantă și este evacuat printr-un orificiu de secțiune S

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \frac{d\rho V}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho S \frac{dx}{dt} = \rho S u \tag{108}$$

Obținem (107) sub forma

$$v(t) = v_0 + \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \rho S u t}\right) \tag{109}$$

Putem stabili și condiția de desprindere a unei rachete lansată vertical la suprafața pământului. Acum $\vec{F} = m\vec{g}$ și (99) în proiecție pe axa verticală la suprafața Pământului se scrie

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt} \quad , \quad \frac{dm}{dt} > 0 \tag{110}$$

Pentru desprindere $\frac{dv}{dt} > 0 \Rightarrow$

$$-mg - u \frac{dm}{dt} > 0$$ adică știind $Q_m = -\frac{dm}{dt}$

Obținem $-m_0 g + u Q_m > 0$

adică $$u Q_m > m_0 g \tag{111}$$

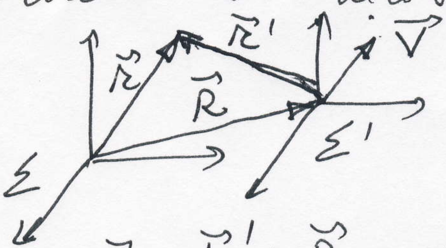
sau $$\rho S u^2 > m_0 g \tag{112}$$

1.3. Sisteme de referință inerțiale și neinerțiale

Am văzut că sistemele de referință inerțiale sunt sisteme de referință care se deplasează unele față de altele rectiliniu și uniform. Pe de altă parte pe baza principiului relativității al lui Galilei legile fizicii trebuie să fie invariante la trecerea de la un sistem inerțial la altul.

Vom arăta că aceste afirmații sunt echivalente în mecanica clasică.

Trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul poartă numele de transformări Galilei. Se subînțelege că în fiecare sistem de referință se măsoară și timpul.



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} \quad \text{dar} \quad \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V} t$$

Ultima relație exprimă mișcarea rectilinie și uniformă a lui Σ' față de Σ ($\vec{V} = \cancel{\text{const}}$)

Obținem astfel transformările Galilei

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V} t' \\ t = t' \end{cases} \qquad (113)$$

La trecerea de la Σ' la Σ adică la schimbarea $(\vec{r}\,', t') \to (\vec{r}, t)$

În mecanica clasică se postulează caracterul absolut al timpului $t = t'$ (timpul este același în orice sistem de referință).

Pentru simplitate a presupus că la $t = 0$ originile O și O' coincid adică $\vec{R}_0 = 0$

În coordonate carteziene transformările Galilei se scriu

$$\begin{cases} x = x' + V_x t' \\ y = y' + V_y t' \\ z = z' + V_z t' \\ t = t' \end{cases} \qquad (x', y', z', t') \to (x, y, z, t) \qquad (114)$$

Transformările Galilei inverse sunt $(\vec{V} \to -\vec{V})$

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V} t \\ t' = t \end{cases} \qquad (115)$$

Arătăm că ecuațiile de mișcare ale mecanicii newtoniene sunt invariante la aceste transformări. Pentru simplitate vom alege cazul unui punct material aflat sub acțiunea forței $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Am văzut că forțele conservative depind doar de $\vec{r}$. Pentru forțele neconservative poate exista o dependență de viteză $\dot{\vec{r}}$ dar în esență aceasta este doar o dependență de viteza relativă a diverselor particule și ea nu se modifică la trecerea de la un sistem la altul $\dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}$. Chiar și forțele potențiale de interacție depind de distanța relativă

știm că $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

sau $$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \text{ în } \Sigma \qquad (116)$$

Utilizăm transformările Galilei (115) și obținem

$$\begin{cases} d\vec{r}\,' = d\vec{r} - \vec{V} dt \\ dt' = dt \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} \equiv \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V}$$

În continuare avem $\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = \dfrac{d\vec{v}\,'}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} - \underbrace{\dfrac{d\vec{V}}{dt}}_{=0} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Cum $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \to \vec{F}\,'(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,', t')$

Obținem din (116) că

$$m \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = \vec{F}\,'(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,', t') \qquad (117)$$

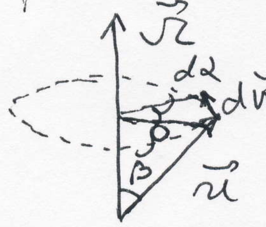
adică legea II a lui Newton rămâne invariantă la trecerea $\Sigma \to \Sigma'$.

Sistemele neinerțiale sunt sistemele care se mișcă accelerat față de sistemele inerțiale ($\vec{V}' = \text{const} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \vec{A} \neq 0$).

Considerăm un sistem de referință Σ' care se mișcă accelerat față de sistemul inerțial Σ.

Cea mai generală mișcare a lui Σ' față de Σ este o compunerea a unei mișcări accelerate a originii lui O' față de Σ' plus o rotație a axelor lui Σ' (adică o rotație a lui Σ')

Rotația lui Σ' presupune rotația axelor deci a versorilor $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ai acestuia. Fie $\vec{u}$ un versor supus la o rotație cu viteza unghiulară $\vec{\Omega}$; $|\vec{\Omega}| = \frac{d\alpha}{dt}$, α unghi de rotație. Direcția lui $\vec{\Omega}$ determină direcția axei de rotație (care și ea se poate modifica în timp:



Determinăm $\frac{d\vec{u}}{dt}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\alpha}|\vec{\Omega}| \qquad (118)$$

$$d\vec{u} \perp \vec{u} \qquad d\vec{u} \perp \vec{\Omega}$$

$$|d\vec{u}| = \rho\, d\alpha = \underbrace{|\vec{u}|}_{=1}\sin\beta \cdot d\alpha \Rightarrow \left|\frac{d\vec{u}}{d\alpha}\right| = \sin\beta$$

Obținem că $\left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right| \overset{(118)}{=} \left|\frac{d\vec{u}}{d\alpha}\right| |\vec{\Omega}| = |\vec{\Omega}| \sin\beta = |\vec{\Omega}||\vec{u}| \sin\beta$

adică $\left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right| = |\vec{\Omega} \times \vec{u}|$ Analizând ~~sensul~~ lui $d\vec{u}$ putem scrie

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{u} \quad , \vec{u} \text{ versor} \qquad (119)$$

Fie $\vec{A}$ un vector într-un sistem de referință care se rotește și translatează în același timp

$$\vec{A}_{(t)} = A_x(t)\vec{i}(t) + A_y(t)\vec{j}(t) + A_z(t)\vec{k}(t) \qquad (120)$$

Observăm variația în timp și a versorilor.

Calculăm derivata lui $\vec{A}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x \vec{i} + A_x \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{A}_y \vec{j} + A_y \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{A}_z \vec{k} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

Utilizăm (119) pentru versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ avem

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\dot{A}_x \vec{i} + \dot{A}_y \vec{j} + \dot{A}_z \vec{k}) + A_x \vec{\Omega}\times\vec{i} + A_y \vec{\Omega}\times\vec{j} + A_z \vec{\Omega}\times\vec{k}$$

$$= \overset{\circ}{\vec{A}} + \vec{\Omega}\times(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

și în final obținem relația lui Poisson

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \overset{\circ}{\vec{A}} + \vec{\Omega}\times\vec{A} \qquad (121)$$

Prin $\frac{d\vec{A}}{dt}$ înțelegem acum derivata totală a unui vector, care implică pe lângă variația coordonatelor A_x, A_y, A_z și variația în timp datorată rotației axelor sistemului de coordonate, adică variația în timp a versorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Prin $\overset{\circ}{\vec{A}}$ vom înțelege de data aceasta doar variația componentelor A_x, A_y, A_z.

Considerăm transformările

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{R}(t) \qquad (122)$$

de la sistemul Σ inerțial la sistemul Σ' neinerțial $(\vec{V}(t) \neq const.)$ Subînțelegem $t=t'$.

Derivăm (122) în raport cu timpul. Vectorii $\vec{r}(t)$ și $\vec{R}(t)$ sunt vectori din Σ-sistem inerțial, care nu are rotație și deci derivatele acestor vor implica doar coordonatele (versorii $\vec{r}, \vec{R}$)

Așadar

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}(t) + \dot{\vec{R}} = \overset{\circ}{\vec{r}}\,' + \vec{\Omega}\times\vec{r}\,' + \dot{\vec{R}} \qquad (123)$$

Derivăm (123) în raport cu timpul

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\overset{\circ}{\vec{r}}\,' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\Omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \ddot{\vec{R}} =$$

$$= \overset{\circ\circ}{\vec{r}}\,' + \vec{\Omega}\times\overset{\circ}{\vec{r}}\,' + \overset{\circ}{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\Omega}\times\overset{\circ}{\vec{r}}\,' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') + \ddot{\vec{R}}$$

Am ținut cont că și vectorul $\vec{\Omega}$ este descris în Σ', și deci $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \overset{\circ}{\vec{\Omega}}$.

$$\ddot{\vec{r}} = \overset{\circ\circ}{\vec{r}}\,' + \ddot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') + 2\vec{\Omega}\times\overset{\circ}{\vec{r}}\,' + \overset{\circ}{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' \qquad (124)$$

$\ddot{\vec{R}} \equiv \vec{A}$ reprezintă accelerația de translație a lui Σ' față de Σ. În general, alegând coordonatele normale (naturale), după cum am văzut

$$\vec{A} = \vec{A}_\tau + \vec{A}_n = \dot{V}\cdot\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n} \qquad (125)$$

$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$ este accelerația punctului material în Σ, sistem inerțial

$\ddot{\vec{r}}' = \vec{a}'$ este accelerația p.m. în Σ' sistem neinerțial

$\vec{a}_{cp} \equiv \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$ - este accelerația centripetă.

$\vec{a}_c = 2(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}') \equiv 2(\vec{\Omega}\times\vec{v}')$ - este accelerația Coriolis

$\vec{a}_\varepsilon = \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}'$, unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\Omega}}$ este vectorul accelerație unghiulară, este accelerația datorată variației în timp a vectorului viteză unghiulară $\vec{\Omega}$.

Astfel mai putem scrie

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2(\vec{\Omega}\times\vec{v}') + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' \qquad (126)$$

1.4. Dinamica în sistemele neinerțiale

După cum am văzut principiul fundamental al dinamicii se scrie într-un sistem de referință inerțial. Totuși de multe ori este dificil să găsim un sistem de referință inerțial în care să studiem o mișcare mecanică. De exemplu: studiul mișcării mecanice la suprafața Pământului pe perioade de timp suficient de mari să nu se poată neglija rotația acestuia în jurul propriei axe, ~~precum~~ chiar și mișcarea de translație în jurul Soarelui. În acest caz Pământul nu mai este un sistem inerțial. Totuși a alege ca sistem de referință inerțial Soarele este neconvenabil în studiul unei mișcări la suprafața Pământului.

În continuare vom scrie principiul fundamental (cu ajustările adecvate) într-un sistem neinerțial

Știm că în sistemul de referință Σ principiul fundamental se scrie

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (127)$$

Folosind expresia lui $\vec{a}$ din (126) avem pentru (127)

$$m\vec{a}' + m\vec{A} + m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2m(\vec{\Omega}\times\vec{v}') + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{F}$$

Păstrăm în membrul stâng doar $m\vec{a}'$:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + (-m\vec{A}) + (-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')) + (-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}') + (-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}') \qquad (128)$$

Cum în termenul din dreapta în principiul fundamental există termeni de forță toți termenii din membrul drept ai lui (128) pot fi interpretați ca forțe

$\vec{F}_i = -m\vec{A}$ - forța de inerție

$F_{cf} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$ - forța centrifugă de inerție

$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$ - forța Coriolis

$\vec{F}_\varepsilon = -m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$ -

Așadar putem aplica principiul fundamental într-un sistem de inerție

$$m\vec{a} = \vec{F}' \qquad (128)$$

dacă la rezultanta forțelor de interacție $\vec{F}$, se adaugă forțele de inerție

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_C + \vec{F}_\varepsilon \qquad (129)$$

Observație: forțele de inerție nu sunt forțe de interacție, ele nu respectă principiul acțiunilor reciproce (Principiul III), de aceea sunt numite uneori și pseudoforțe.